Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования ГУО «Гимназия № 10» г. Минска

ПРОЕКТ
«Очевидное – невероятное в математике»,

представленный на Международный некоммерческий конкурс
просветительно-творческих проектов учащихся
«Поколение свершений – 2018»

Автор:
Ступакевич Иван Александрович
Руководитель:
Скубенко Ольга Евгеньевна

Минск, 2018

Я ученик 10-го класса 10 гимназии г. Минска. Моим увлечением является математика. Решая математические задачи, невольно удивляешься красоте математических выражений, их внешней и внутренней гармонии.

Работая с числами, я обнаружил закономерность, заключающуюся в том, что квадрат любого числа равен сумме ряда нечетных чисел, начиная с 1, в котором число членов равно модулю числа, возводимого в квадрат. Это с очевидностью представлено в таблице:

$1^2 =$	1
$2^2 =$	$1 + 3$
$3^2 =$	$1 + 3 + 5$
$4^2 =$	$1 + 3 + 5 + 7$
$5^2 =$	$1 + 3 + 5 + 7 + 9$
$6^2 =$	$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$
$7^2 =$	$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13$
$8^2 =$	$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15$
$9^2 =$	$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17$
$10^2 =$	$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19$
$11^2 =$	$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21$
$12^2 =$	$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23$
$13^2 =$	$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25$

Числа, стоящие справа в таблице, представляют собой арифметическую прогрессию, в которой разность прогрессии $d = 2$, а первый член прогрессии $a_1 = 1$.

И действительно, если к числам, стоящим справа в любой строке таблицы, применить известную формулу суммы арифметической прогрессии: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$, то получим число, стоящее слева в этой же строке.

Рассматривая приведенную таблицу, я обратил внимание на первую строку: $1^2 = 1$. Всегда ли можно соглашаться с таким утверждением? Мои сомнения усилились, когда я попытался решить следующую задачу:

Имеется последовательность 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2. Сумму этих чисел легко найти. Очевидно, что эта сумма равна 18.

Однако эту последовательность можно рассматривать как арифметическую прогрессию, в которой $a_1 = 2$, $d = 0$. Эту же последовательность можно рассматривать и как геометрическую прогрессию, в которой первый член $b_1 = 2$, а знаменатель прогрессии $q = 1$. Следовательно, к этой прогрессии можно применить известные формулы для суммы членов арифметической и геометрической прогрессий.

Найдем сумму 9-ти членов арифметической прогрессии.

Получим: $S_n = \frac{2+2}{2} 9 = 18$.

Найдем сумму тех же 9-ти членов геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1},$$

где b_1 – первый член геометрической прогрессии (в нашем случае это 2), а q – знаменатель прогрессии (в нашем случае – 1).

Если подставить значения, получим:

$$S_9 = \frac{2(1^9 - 1)}{1 - 1}.$$

Получается неопределенность...

Чтобы ее разрешить, следует предположить, что единицы, записанные в последней формуле, не эквивалентны. Для этого запишем искомую сумму следующим образом:

$$S_9 = \frac{2(1^9 - 1^0)}{1 - 1^0} = 2\frac{(1^8 + 1^7 + 1^6 + 1^5 + 1^4 + 1^3 + 1^2 + 1^1 + 1^0)(1 - 1^0)}{1 - 1^0} = 18.$$

Противоречие разрешилось.

Если вернуться к исходной таблице, то действительно нельзя всегда утверждать, что $1^2 = 1$, особенно, если учесть, что величины в физике часто имеют размерность. Например, 1 $м^2$ не равен 1 м.